

Exercice 1 :

$$\begin{cases} f(0) = \frac{1}{2} \\ f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}; x \neq 0 \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 0.

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{1 - \sqrt{1+x^2}}{x}; x \neq 0 \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 0.

$$\begin{cases} f(3) = 6 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}; x \neq 3 \end{cases}$$

 f est-elle continue en 3

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}; x \neq 2 \\ f(2) = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en 2.

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{3x-7}-\sqrt{x-1}}{x-3}; x \neq 3 \\ f(3) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 3.

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{1+(\sin x)^2}-1}{x^2}; x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 0.

$$\begin{cases} f(3) = 0 \\ f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x-3}; x \neq 3 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en 3.

$$\begin{cases} f(-1) = 0 \\ f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}; x \neq -1 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en -1.

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}; x \neq 2 \\ f(2) = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en 2.

$$\begin{cases} g(2) = 5 \\ g(x) = \frac{x^3-2x^2+x-2}{x-2}; x \neq 2 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en 2.

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x^3+x^2+1}{-3x^2-x+2}; x \neq -1 \\ f(-1) = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en -1.

CORRIGÉ DÉTAILLÉ PAS À PAS

Exercice 1 : La continuité en un point

La règle d'or de la continuité

Pour montrer qu'une fonction f est **continue en un point** a , il faut calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers a , et vérifier qu'elle est **égale à l'image** $f(a)$.

On doit trouver : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

PARTIE 1 : Utilisation du conjugué (Les Racines Carrées)

Astuce pour toi : Si tu as une racine carrée $\sqrt{A} - B$ et que le calcul direct donne « $\frac{0}{0}$ », il faut **multiplier par le conjugué** $\sqrt{A} + B$ en haut et en bas ! Cela donne l'identité : $(\sqrt{A} - B)(\sqrt{A} + B) = A - B^2$.

1) Étude de la continuité en 0 :

$$f(0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

Étape 1 : On remplace x par 0 $\Rightarrow \frac{\sqrt{0+1} - 1}{0} = \frac{0}{0}$ (F.I)

Étape 2 : On multiplie par le conjugué.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1} - 1) \times (\sqrt{x+1} + 1)}{x \times (\sqrt{x+1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1} + 1)} \end{aligned}$$

Étape 3 : On simplifie par x et on calcule.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{\sqrt{0+1} + 1} = \frac{1}{2}$$

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, donc la fonction f est continue en 0.

2) Étude de la continuité en 0 :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{1 - \sqrt{1+x^2}}{x}$$

Étape 1 : On remplace x par 0 $\Rightarrow \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ (F.I)

Étape 2 : On multiplie par le conjugué.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{1+x^2}) \times (1 + \sqrt{1+x^2})}{x \times (1 + \sqrt{1+x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1+x^2)}{x(1 + \sqrt{1+x^2})}$$

Étape 3 : On simplifie et on calcule.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x(1 + \sqrt{1 + x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{1 + \sqrt{1 + x^2}} = \frac{0}{1 + 1} = \mathbf{0}$$

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, donc **la fonction f est continue en 0**.

3) Étude de la continuité en 3 :

$$f(3) = 6 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x-3}$$

Étape 1 : On remplace x par 3 $\Rightarrow \frac{\sqrt{9} - 3}{3 - 3} = \frac{0}{0}$ (F.I)

Étape 2 : On multiplie par le conjugué.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6} - 3) \times (\sqrt{x+6} + 3)}{(x-3) \times (\sqrt{x+6} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+6-9}{(x-3)(\sqrt{x+6} + 3)}$$

Étape 3 : On simplifie par $(x-3)$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+6} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+6} + 3} = \frac{1}{\sqrt{9} + 3} = \frac{1}{6}$$

Conclusion : On a $\frac{1}{6} \neq 6$, donc $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \neq f(3)$. f n'est pas continue en 3.

4) Étude de la continuité en 2 :

$$f(2) = -\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x-2}$$

Étape 1 : On remplace x par 2 $\Rightarrow \frac{\sqrt{4+5} - 3}{2 - 2} = \frac{0}{0}$ (F.I)

Étape 2 : On multiplie par le conjugué.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2+5} - 3) \times (\sqrt{x^2+5} + 3)}{(x-2) \times (\sqrt{x^2+5} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+5-9}{(x-2)(\sqrt{x^2+5} + 3)}$$

Étape 3 : On factorise $x^2 - 4$ et on simplifie par $(x-2)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5} + 3} = \frac{2+2}{\sqrt{9} + 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$ (car $\frac{2}{3} \neq -\frac{1}{3}$). f n'est pas continue en 2.

5) Étude de la continuité en 3 :

$$f(3) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{\sqrt{3x-7} - \sqrt{x-1}}{x-3}$$

Étape 1 : On remplace par 3 $\Rightarrow \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{0} = \frac{0}{0}$ (F.I)

Étape 2 : Multiplication par le conjugué.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{3x-7} - \sqrt{x-1}) \times (\sqrt{3x-7} + \sqrt{x-1})}{(x-3) \times (\sqrt{3x-7} + \sqrt{x-1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3x-7) - (x-1)}{(x-3)(\dots)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-6}{(x-3)(\sqrt{3x-7} + \sqrt{x-1})} \end{aligned}$$

Étape 3 : On factorise par 2 en haut puis on simplifie par $(x - 3)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x - 3)}{(x - 3)(\sqrt{3x - 7} + \sqrt{x - 1})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{\sqrt{3x - 7} + \sqrt{x - 1}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$. f est continue en 3.

PARTIE 2 : Fonctions Trigonométriques

Astuce : N'oublie pas la limite fondamentale de la trigonométrie : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

6) Étude de la continuité en 0 :

$$f(0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{\sqrt{1 + (\sin x)^2} - 1}{x^2}$$

Étape 1 : On remplace par 0 $\Rightarrow \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ (F.I)

Étape 2 : On multiplie par le conjugué.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 + (\sin x)^2} - 1) \times (\sqrt{1 + (\sin x)^2} + 1)}{x^2 \times (\sqrt{1 + (\sin x)^2} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + (\sin x)^2 - 1}{x^2(\sqrt{1 + (\sin x)^2} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^2}{x^2(\sqrt{1 + (\sin x)^2} + 1)} \end{aligned}$$

Étape 3 : On sépare la limite trigonométrique connue.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \frac{1}{\sqrt{1 + (\sin x)^2} + 1} \\ &= (1)^2 \times \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. f est continue en 0.

PARTIE 3 : Utilisation de la factorisation (Polynômes)

Astuce pour toi : Si tu n'as pas de racine carrée et que le calcul direct donne « $\frac{0}{0}$ », il faut **factoriser**.
Si la limite est en a , il y a toujours un $(x - a)$ caché en haut et en bas qu'il faut simplifier !

7) Étude de la continuité en 3 :

$$f(3) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$$

Étape 1 : On remplace par 3 $\Rightarrow \frac{9-6-3}{3-3} = \frac{0}{0}$ (F.I)

Étape 2 : On factorise le polynôme en haut par $(x - 3)$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)}{x-3}$$

Étape 3 : On simplifie par $(x - 3)$ et on calcule.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x+1) = 3+1 = 4$$

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \neq f(3)$. f n'est pas continue en 3.

8) Étude de la continuité en -1 :

$$f(-1) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$$

Étape 1 : On remplace par $-1 \Rightarrow \frac{1 - 1}{1 - 3 + 2} = \frac{0}{0}$ (F.I)

Étape 2 : On factorise par $(x - (-1))$, c'est-à-dire $(x + 1)$.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 1)(\mathbf{x + 1})}{(x + 2)(\mathbf{x + 1})}$$

Étape 3 : On simplifie par $(x + 1)$.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 1}{x + 2} = \frac{-1 - 1}{-1 + 2} = \frac{-2}{1} = -2$$

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \neq f(-1)$. f n'est pas continue en -1 .

9) Étude de la continuité en 2 :

$$f(2) = -\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2}$$

Étape 1 : On remplace par $2 \Rightarrow \frac{4 - 10 + 6}{4 - 2 - 2} = \frac{0}{0}$ (F.I)

Étape 2 : On factorise par $(x - 2)$ en haut et en bas.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\mathbf{x - 2})(x - 3)}{(\mathbf{x - 2})(x + 1)}$$

Étape 3 : On simplifie par $(x - 2)$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 3}{x + 1} = \frac{2 - 3}{2 + 1} = -\frac{1}{3}$$

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$. f est continue en 2 .

10) Étude de la continuité en 2 :

$$g(2) = 5 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x - 2}$$

Étape 1 : On remplace par $2 \Rightarrow \frac{0}{0}$ (F.I)

Étape 2 : On factorise le numérateur (par groupement).

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = x^2(\mathbf{x - 2}) + 1(\mathbf{x - 2}) = (\mathbf{x - 2})(x^2 + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\mathbf{x - 2})(x^2 + 1)}{x - 2}$$

Étape 3 : On simplifie par $(x - 2)$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 2^2 + 1 = 5$$

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2)$. g est continue en 2.

11) Étude de la continuité en -1 :

$$f(-1) = -\frac{4}{5} \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 1}{-3x^2 - x + 2}$$

Étape 1 : On remplace par $-1 \Rightarrow \frac{0}{0}$ (F.I)

Étape 2 : On factorise par $(x + 1)$ (en utilisant la division euclidienne par exemple).

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\mathbf{x} + \mathbf{1})(2x^2 - x + 1)}{(\mathbf{x} + \mathbf{1})(-3x + 2)}$$

Étape 3 : On simplifie par $(x + 1)$ et on recalcule.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x + 1}{-3x + 2} = \frac{2(-1)^2 - (-1) + 1}{-3(-1) + 2} = \frac{2 + 1 + 1}{3 + 2} = \frac{4}{5}$$

Conclusion : On a $\frac{4}{5} \neq -\frac{4}{5}$, donc $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \neq f(-1)$. f n'est pas continue en -1 .

« Le succès, c'est de tomber sept fois et de se relever huit. » Continue tes efforts !